Геометрический подход к унипотентным представлениям
совместно с Иваном Лосевым и Лукасом Мейсоном-Брауном

Митя Матвеевский

4 июня 2020 г.

План

1. Унипотентные представления
   - Унитарные представления
   - Унипотентные представления по Артуру
   - Vogan's desiderata для унипотентных представлений
2. Квантования
   - Определение квантований
   - Канонические квантования
3. Обобщенная БВЛС двойственность
   - Включение Бала-Картера
   - Обобщенная двойственность

Унипотентные представления

1) Унитарные представления и метод орбит.
2) Унипотентные представления по Артуру.
3) Vogan's desiderata для унипотентных представлений.

Унитарные представления

G – редуктивная вещественная группа.

В этом докладе G всегда простая классическая комплексная группа (то есть $SL_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{C})$ или $Sp_n(\mathbb{C})$).

Унитарное представление – пара $(\mathcal{H}, \rho)$, где
$\mathcal{H}$ – Гильбертово пространство,
$\rho : G \to U(\mathcal{H})$ – непрерывный гомоморфизм групп.

Вопрос: [Гельфанд, 1930-е]

Описать множество $\widehat{G}$ неприводимых унитарных представлений G.

Для классических комплексных групп сделано Барбашем в 1989 г.

Метод орбит

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли для G.
Идея (Костант, Кириллов):

Гипотеза (метод орбит):

Должно быть “близкое к биекции“ соответствие между присоединенными орбитами в $\mathfrak{g}^*$ и $\widehat{G}$.

Левая часть – симплектические многообразия.
Правая часть – Гильбертовы пространства.

Ожидание:

Предполагаемое соответствие в методе орбит – это квантование орбиты.

Унипотентные представления

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ – нильпотентная орбита.

Ожидание:

Существует конечное множество $Unip(\mathcal{O}) \subset \widehat{G}$ унипотентных представлений, ассоциированных с $\mathcal{O}$, обладающих хорошими свойствами.

Пусть X – неприводимое представление $U(\mathfrak{g})$;
$J \subset U(\mathfrak{g})$ – аннулятор X;
На $U(\mathfrak{g})$ есть ПБВ фильтрация, $F_i U(\mathfrak{g})$ порождено мономами степени не больше i;
$\operatorname{gr} J \subset S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$.

Факт: (Джозеф)

$V(\operatorname{gr} J) = \overline{\mathcal{O}}$, где $\mathcal{O}$ – нильпотентная орбита.

Двойственность Барбаша-Вогана-Люстига-Спалтенштейна

G – комплексная классическая группа Ли;

$\mathfrak{g}$ – соответствующая алгебра Ли;

$G^\vee$, $\mathfrak{g}^\vee$ – Лэнглендс двойственные.

$\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$, $\mathcal{N}^\vee \subset \mathfrak{g}^\vee$ – нильпотентные конусы.

БВЛС двойственность:

Есть отображение $d : \mathcal{N}^\vee / G^\vee \to \mathcal{N}/G$.
Орбиты в образе d называются специальными, и d задает биекцию между специальными орбитами.

Нильпотентные орбиты в классических алгебрах Ли

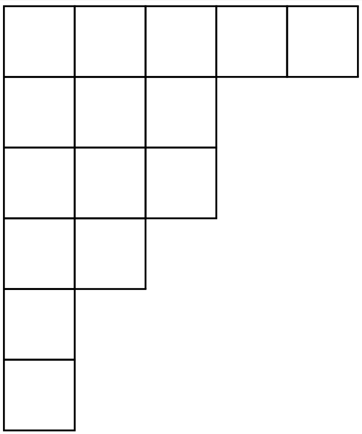
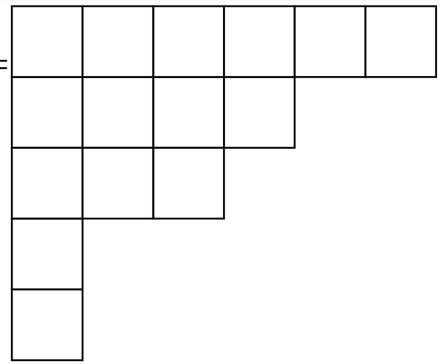
Нильпотентные SL_n орбиты в $\mathfrak{sl}_n$ находятся в биекции с разбиениями n.

Нильпотентные Sp_n орбиты в $\mathfrak{sp}_n$ находятся в биекции с разбиениями n, такими, что каждый нечетный элемент разбиения встречается четное число раз.

Нильпотентные O_n орбиты в $\mathfrak{so}_n$ находятся в биекции с разбиениями n, такими, что каждый четный элемент разбиения встречается четное число раз.

БВЛС двойственность в типе А

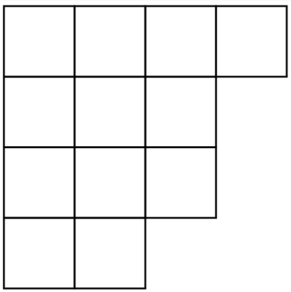
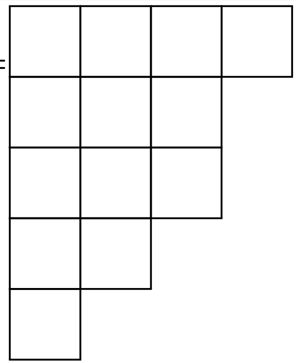
$d(\alpha) = \alpha^T$

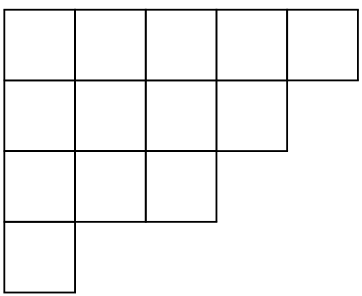
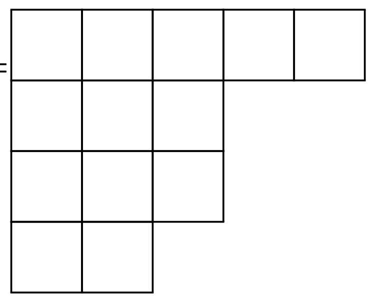
$\alpha =$ , $d(\alpha) =$ 

Все орбиты специальные.

БВЛС двойственность в типе B

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \to \beta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, 1)$, $\beta \to \beta^T$,
$\beta^T \to d(\alpha) = B(\beta^T)$.

$\alpha =$ , $\beta =$ ,

$\beta^T =$ , $d(\alpha) =$ 

Унипотентность по Артуру

$\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}$ – специальная орбита;

$\mathcal{O}^\vee \subset \mathfrak{g}^\vee$ такая, что $d(\mathcal{O}^\vee) = \mathcal{O}$;

$e^\vee, f^\vee, h^\vee$ – $\mathfrak{sl}_2$-тройка для $\mathcal{O}^\vee$, $h^\vee \subset \mathfrak{h}^\vee$.

$Z(U(\mathfrak{g})) \simeq S(\mathfrak{h})^W \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*/W]$;

$I(\mathcal{O}^\vee) = I(\frac{1}{2}h^\vee) \subset U(\mathfrak{g})$ – максимальный идеал.

Определение: (Артур, Барбаш-Воган)

$Unip^a(\mathcal{O}) = \{X$ неприв., $\mathrm{Ann}(X) = I(\mathcal{O}^\vee), d(\mathcal{O}^\vee) = \mathcal{O}\}$.

Недостатки определения

1) Если $\mathcal{O}$ не специальная, то $Unip^a(\mathcal{O}) = 0$.
   Метаплектическое представление ассоциировано с минимальной орбитой в $\mathfrak{sp}_n$, которая не специальна.
2) Представление Вейля алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$:

$$E = \frac{i}{2}x^2$$

$$H = x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}$$

$$F = \frac{i}{2}\frac{d^2}{dx^2}.$$

Vogan's desiderata

1) $Unip(\mathfrak{g}) = \bigcup Unip(\mathcal{O})$
2) $Unip(\mathfrak{g}) \subset \widehat{G}$
3) Для $X \in Unip(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Ann}(X)$ – максимальный идеал
4) $Unip(\mathcal{O}) \supset Unip^a(\mathcal{O})$
5) Гипотеза Вогана.

Гипотеза Вогана

Пусть $X \in Unip(\mathcal{O})$;
$\mathrm{gr}\, X$ – конечно порожденный модуль над $S(\mathfrak{g})$;
$\mathrm{Supp}\,(\mathrm{gr}\, X) = \overline{\mathcal{O}}$;
$M \in \mathrm{Coh}^G(\overline{\mathcal{O}})$, $\Gamma(M) = \mathrm{gr}\, X$.

Гипотеза/теорема Вогана:

$\mathrm{gr}\, X \simeq \Gamma(\mathcal{O}, M|_{\mathcal{O}})$, как представления G.

Квантование конической Пуассоновой алгебры

A – конечно порожденная Пуассонова алгебра=коммутативная+скобка Ли+тождество Лейбница.

$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$, $A_0 = \mathbb{C}$.

$\{A_i, A_j\} \subset A_{i+j-d}$ для фиксированного целого $d > 0$.

Определение:

(Фильтрованное) квантование алгебры A – это пара $(\mathcal{A}, \theta)$, где

$\mathcal{A} = \bigcup_i F_i\mathcal{A}$ – фильтрованная алгебра;

$[F_i\mathcal{A}, F_j\mathcal{A}] \subset F_{i+j-d}\mathcal{A}$;

$\theta : \operatorname{gr} \mathcal{A} \to A$ – изоморфизм градуированных Пуассоновых алгебр, где

$\{a + F_{i-1}\mathcal{A}, b + F_{j-1}\mathcal{A}\} = [a, b] + F_{i+j-d-1}\mathcal{A}$.

Квантование Пуассоновой схемы

X – Пуассонова схема, то есть есть скобка Пуассона на $\mathcal{S}_X$.

$\mathbb{C}^\times \curvearrowright X$.

Примеры: симплектические многообразия, $X = \operatorname{Spec}(A)$, где A – коническая Пуассонова алгебра.

Определение:

(Фильтрованное) квантование схемы X – это пара $(\mathcal{D}, \Theta)$, где

- $\mathcal{D}$ – пучок фильтрованных алгебр;
- $[F_i\mathcal{D}, F_j\mathcal{D}] \subset F_{i+j-d}\mathcal{D}$;
- $\Theta : \operatorname{gr}\mathcal{D} \to \mathcal{S}_X$ – $\mathbb{C}^\times$-эквивариантный изоморфизм пучков Пуассоновых алгебр.

Примеры

1) $A = \mathbb{C}[x, y]$, $\mathcal{A} = T(x, y)/(xy - yx = 1) = \mathcal{D}(\mathbb{A}^1)$.
2) $A = S(\mathfrak{g})$, $\mathcal{A} = U(\mathfrak{g})$.
3) $X = T^*X_0$, $\mathcal{D} = \underline{\mathcal{D}}(X_0)$ – микролокализация $\mathcal{D}(X_0)$ на T^*X_0.
4) $X = \mathfrak{g}^*$, $\mathcal{D} = (\pi_*\underline{\mathcal{D}}(G))^G$, где $\pi : T^*G \simeq G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$.

Лемма:

Пусть $X = \mathrm{Spec}(A)$, где A – коническая Пуассонова алгебра. Взятие глобальных сечений $\mathcal{D} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{D})$ задает биекцию между квантованиями X и квантованиями A.

Квантования $\mathcal{N}$

$\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}^*$ – нильпотентный конус.

Теорема:

Квантования $\mathcal{N}$ находятся в биекции с $\mathfrak{h}^*/W$.

$\chi \in \mathfrak{h}^*/W \mapsto m_\chi \subset \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W \simeq Z(U(\mathfrak{g}))$.
$I_\chi = (m_\chi) \subset U(\mathfrak{g})$.
$\mathcal{A}_\chi = U(\mathfrak{g})/I_\chi$.
Хотим описание квантований $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{O}}])$ для любой орбиты $\mathcal{O} \subset \mathcal{N}$, и любого G-эквивариантного накрытия $\widehat{\mathcal{O}}$ орбиты $\mathcal{O}$.

Индукция Люстига-Спалтенштейна

Δ – простые корни $\mathfrak{g}$ $\quad \Delta = (e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$

Φ – система корней $\mathfrak{g}$ $\quad \Phi = (\{e_i - e_j\})$

$I \subset \Delta$ $\quad I = \Delta / \{e_{k-1} - e_k\}$

$\Phi_I \subset \Phi$ $\quad \Phi_I = (\{e_i - e_j | i, j \leqslant k \text{ или } i, j > k\})$

$\mathfrak{l}_I = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi_I} \mathfrak{g}_\alpha$ – подалгебра Леви $\quad \mathfrak{l}_I = \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_k \times \mathfrak{gl}_{n-k});$

$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{l}_I \oplus \mathfrak{n}_I$ – параболическая подалгебра

$P \subset G$, $L \subset G$ – соответствующие подгруппы.

$\mathcal{O}_0 \subset \mathfrak{l}$ – нильпотентная L-орбита.

Индукция Люстига-Спалтенштейна

Образ отображения $\rho : G \times^P (\overline{\mathcal{O}}_0 \times \mathfrak{n}) \to \mathfrak{g}$ содержит единственную открытую орбиту $\mathcal{O}$.

Орбита $\mathcal{O}$ называется индуцированной с $(\mathcal{O}_0, \mathfrak{l})$. Если орбита $\mathcal{O}$ не может быть индуцирована с собственной подалгебры Леви, $\mathcal{O}$ называется жесткой.

Бирациональная индукция Люстига-Спалтенштейна

Пусть $\mathcal{O}$ индуцировано с $\mathcal{O}_0$.

$\widehat{\mathcal{O}}_0$ – L-эквивариантное накрытие $\mathcal{O}_0$.

$\rho : G \times^P (\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{O}}_0]) \times \mathfrak{n}) \to \mathfrak{g}$.

$\widehat{\mathcal{O}} = \rho^{-1}(\mathcal{O})$.

$\widehat{\mathcal{O}}$ является G-эквивариантным накрытием $\mathcal{O}$ и называется бирационально индуцированной с $(\widehat{\mathcal{O}}_0, \mathfrak{l})$. Если $\widehat{\mathcal{O}}$ не может быть бирационально индуцировано с собственной подалгебры Леви, накрытие $\widehat{\mathcal{O}}$ называется бирационально жестким.

Для любого накрытия $\widehat{\mathcal{O}}$ существует единственная пара $(\widehat{\mathcal{O}}_0, \mathfrak{l})$, такая, что

$\widehat{\mathcal{O}}$ бирационально индуцировано с $\widehat{\mathcal{O}}_0$;

$\widehat{\mathcal{O}}_0$ – бирационально жестко.

Квантования $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{O}}])$

$\mathfrak{g}$ – классическая алгебра Ли.

Теорема: (Лосев)

Квантования $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{O}}])$ находятся в биекции с $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})^*/W$, где W – группа Намикавы-Вейля, действует отражениями.

Пример:

$\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ – регулярная орбита;

$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathcal{O}]) = \mathcal{N}$;

$\mathcal{O}$ бирационально индуцировано с $\{0\} \subset \mathfrak{h}$;

$\mathfrak{z}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{h}$, W – группа Вейля.

Канонические квантования

Определение:

Квантование, соответствующее $0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})/W$ называется каноническим.

$\mathcal{A}$ – квантование $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{O}}]$;

$\mathcal{A}$ можно сделать G-эквивариантным.

$\Phi : U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$ – квантовое отображение комоментов;

$[\Phi(\chi), \bullet] = \chi_{\mathcal{A}}$;

$I_{\mathcal{A}} = \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Унипотентные представления

Предложение: (Л, М-Б, М)

Пусть $\mathcal{A}$ – каноническое квантование $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{O}}]$. Идеал $I_0(\widehat{\mathcal{O}}) := I_{\mathcal{A}} \subset U(\mathfrak{g})$ – максимален.

Пусть $\lambda_0(\widehat{\mathcal{O}}) \in \mathfrak{h}^*/W$ – соответствующий центральный характер.

Определение: (Л, М-Б, М)

$Unip(\mathcal{O}) = \{X \text{ неприв.}, \ \mathrm{Ann}(X) = I_0(\widehat{\mathcal{O}}), \widehat{\mathcal{O}} \ G\text{-эквив. накрытие } \mathcal{O}\}.$

Vogan's desiderata

1) $Unip(\mathfrak{g}) = \bigcup Unip(\mathcal{O})$
2) $Unip(\mathfrak{g}) \subset \widehat{G}$
3) Для $X \in Unip(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Ann}(X)$ – максимальный идеал
4) $Unip(\mathcal{O}) \supset Unip^a(\mathcal{O})$
5) Гипотеза Вогана.

Пример

Метаплектическое представление – унипотентно.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $\mathcal{O}$ – регулярная орбита.

$\lambda_0(\mathcal{O}) = 0$, Артуровский идеал.

$\widehat{\mathcal{O}} = \mathbb{C}^2/\{0\}$

$\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{O}}] = \mathbb{C}[x, y]$

$\mathcal{A} = \mathbb{C}[x, \frac{d}{dx}]$

$\lambda_0(\widehat{\mathcal{O}}) = \pm\frac{1}{2}$

Обобщенная двойственность

Пусть $SpCov(\mathfrak{g})$ – множество G-эквивариантных накрытий специальных орбит в $\mathfrak{g}$.

Теорема: (Л, М-Б, М)

Существует иньекция $\tilde{d} : \mathcal{N}^\vee / G^\vee \to SpCov(\mathfrak{g})$, такая, что

$\tilde{d}(\mathcal{O}^\vee)$ – накрытие $d(\mathcal{O}^\vee)$;

$I_0(\tilde{d}(\mathcal{O}^\vee)) = I(\frac{1}{2}h^\vee)$.

Следствие:

$Unip(\mathcal{O}) \supset Unip^a(\mathcal{O})$.

Включение Бала-Картера

Пусть $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ – подалгебра Леви, и $\mathcal{O}_0 \subset \mathfrak{l}$ – нильпотентная орбита.
Пусть $e \in \mathcal{O}_0$, и $\mathcal{O} = Ge \subset \mathfrak{g}$.

Определение:

Орбита $\mathcal{O}$ является включением Бала-Картера орбиты $\mathcal{O}_0$.
Если орбита не является включением никакой другой орбиты в собственной подалгебре Леви, она называется выделенной.

Факт: (Барбаш-Воган)

Пусть $\mathcal{O}^\vee$ является включением Бала-Картера орбиты $\mathcal{O}_0^\vee \subset \mathfrak{l}^\vee$. Тогда $d(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{g}$ индуцировано с $d(\mathcal{O}_0) \subset \mathfrak{l}$.

Комбинаторное описание выделенных орбит

Единственная выделенная орбита в типе A – регулярная орбита.

В типах B, C и D, орбита соответствующая разбиению α – выделенная если и только если в α нет повторяющихся частей.

Пусть $\mathcal{O}^\vee$ – выделенная орбита, и $\mathcal{O} = d(\mathcal{O}^\vee)$. Пусть α и β – разбиения, соответствующие $\mathcal{O}^\vee$ и $\mathcal{O}$ соответственно.

$$\mathfrak{g}^\vee = \mathfrak{sp}_{2n},\ \alpha = (2k_1, 2k_2, \dots, 2k_m)$$

$$\mathfrak{g}^\vee = \mathfrak{so}_{2n+1},\ \alpha = (2k_1 - 1, 2k_2 - 1, \dots, 2k_m - 1)$$

$$\mathfrak{g}^\vee = \mathfrak{so}_{2n},\ \alpha = (2k_1 - 1, 2k_2 - 1, \dots, 2k_m - 1)$$

Двойственные к выделенным орбитам

$\mathfrak{g}^\vee = \mathfrak{sp}_{2n}$, $\alpha = (2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_m)$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$, $\beta = (m^{2k_m}, (m-1)^{2(k_{m-1}-k_m)}, \ldots, 2^{2(k_2-k_3)}, 1^{2(k_1-k_2)+1})$

$\mathfrak{g}^\vee = \mathfrak{so}_{2n+1}$, $\alpha = (2k_1 - 1, 2k_2 - 1, \ldots, 2k_m - 1)$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$, $\beta = (m^{2k_m \pm 2}, (m-1)^{2(k_{m-1}-k_m \mp 1)}, \ldots, 2^{2(k_2-k_3+1)}, 1^{2(k_1-k_2-1)})$

$\mathfrak{g}^\vee = \mathfrak{so}_{2n}$, $\alpha = (2k_1 - 1, 2k_2 - 1, \ldots, 2k_m - 1)$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$, $\beta = (m^{2k_m \mp 2}, (m-1)^{2(k_{m-1}-k_m \pm 1)}, \ldots, 2^{2(k_2-k_3-1)}, 1^{2(k_1-k_2+1)})$

Обобщенная БВЛС двойственность

Предложение:

Пусть $\mathcal{O}^\vee \subset \mathcal{N}^\vee$ – выделенная орбита. Тогда у $\mathcal{O} = d(\mathcal{O}^\vee)$ есть бирационально жесткое накрытие $\widehat{\mathcal{O}}$.

Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ орбита $\mathcal{O}$ является бирационально жесткой.

Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ или $\mathfrak{sp}_{2n}$ универсальное G-эквивариантное накрытие $\widetilde{\mathcal{O}}$ является бирационально жестким.

Определение:

Пусть $\mathcal{O}^\vee \subset \mathcal{N}^\vee$ – выделенная орбита. Положим $\tilde{d}(\mathcal{O}^\vee) = \widehat{\mathcal{O}}$.
Пусть $\mathcal{O}^\vee \subset \mathcal{N}^\vee$ является включением Бала-Картера выделенной орбиты $\mathcal{O}_0^\vee \subset \mathfrak{l}^\vee$. Пусть $\widehat{\mathcal{O}}$ – накрытие, бирационально индуцированное с пары $(\tilde{d}(\mathcal{O}_0^\vee), \mathfrak{l})$. Положим $\tilde{d}(\mathcal{O}^\vee) = \widehat{\mathcal{O}}$.

Канонические квантования бирационально жестких накрытий

Предположим $\mathfrak{g}$ типа B, C или D.
Пусть $\widehat{\mathcal{O}}$ – бирационально жесткое накрытие орбиты $\mathcal{O}$, и $\mathcal{O}$ бирационально индуцированно с $(\mathcal{O}_0, \mathfrak{l})$, где $\mathcal{O}_0$ – бирационально жесткая орбита.

Предложение (M)

$\mathfrak{l} = \prod_{i\in S} \mathfrak{gl}_i \times \mathfrak{g}_m$, где множество S параметризует орбиты коразмерности 2 в $\overline{\mathcal{O}}$.

Положим $\varepsilon(\mathfrak{l}) = (\underbrace{\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}}_{n-m \text{ times}}, \underbrace{0, ..., 0}_{m \text{ times}}) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})^*$.

Предложение (Л, М-Б, М)

$\lambda_0(\widehat{\mathcal{O}}) = \lambda_0(\mathcal{O}) + \varepsilon(\mathfrak{l})$.

Анализ двойственных орбит

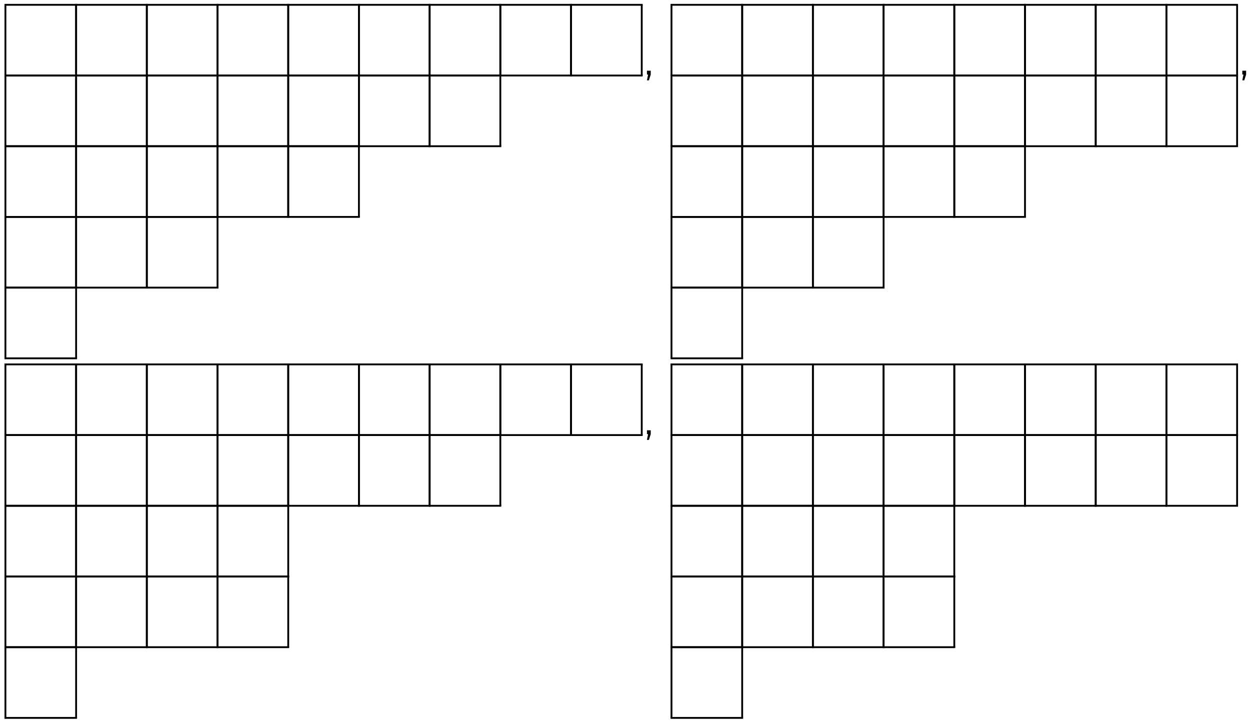
Рассмотрим сначала пример.

Пусть $\mathcal{O}^\vee = (9, 7, 5, 3, 1)$. Тогда $\mathcal{O} = (4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2)$.

$$\mathcal{O} = \ydiagram{4,4,4,4,2,2,2,2}, \quad \mathcal{O}^\vee = \ydiagram{9,7,5,3,1}$$

Анализ двойственных орбит

Рассмотрим все орбиты $\mathcal{O}_i^\vee$ такие, что $d(\mathcal{O}_i^\vee) = \mathcal{O}$.



Анализ двойственных орбит

Пусть $\mathcal{O}^\vee$ – выделенная орбита в типе B или D, и пусть $\mathcal{O} = d(\mathcal{O}^\vee)$. Пусть множество S параметризует орбиты коразмерности 2 в $\overline{\mathcal{O}}$.

Предложение: (Л, М-Б, М)

Орбиты, двойственные $\mathcal{O}$ параметризуются множеством 2^S, и частичный порядок на орбитах совпадает с частичным порядком включения на подмножествах.

$\mathcal{O}^\vee$ является максимальным элементом. Пусть $\mathcal{O}^\vee_{min}$ – минимальный элемент. Тогда

$$\lambda_0(\mathcal{O}) = \frac{1}{2} h^\vee_{min};$$

$$h^\vee = h^\vee_{min} + 2\varepsilon(\mathfrak{l}).$$